Matematyka na oko

Łukasz Płociniczak

Instytut Matematyki i Informatyki
Politechnika Wrocławska

19.06.2013
Będlewo

Co modelowanie matematyczne może zrobić dla oka i widzenia?

Co modelowanie matematyczne może zrobić dla oka i widzenia?

- Mruganie i łzy.
  - Zespół suchego oka (choroba po części „cywilizacyjna": długotrwałe czytanie, jazda samochodem, soczewki...).
  - Mruganie zaciąga cienką warstwę filmu łzowego. Jak opisać ten przepływ?
  - Jak wyliczyć moment początku schnięcia łez (*Break-Up-Time*, BUT) ?

Co modelowanie matematyczne może zrobić dla oka i widzenia?

- Mruganie i łzy.
  - Zespół suchego oka (choroba po części „cywilizacyjna": długotrwałe czytanie, jazda samochodem, soczewki...).
  - Mruganie zaciąga cienką warstwę filmu łzowego. Jak opisać ten przepływ?
  - Jak wyliczyć moment początku schnięcia łez (*Break-Up-Time*, BUT) ?
- Przepływy cieczy wodnistej w komorach.
  - Ciecz wodnista - galaretowana substancja znajdująca się w komorach oka.
  - Jest źródłem powstania ciśnienia wewnątrzgałkowego (IOP).
  - Jej odpowiedni przepływ warunkuje prawidłowe funkcjonowanie oka.

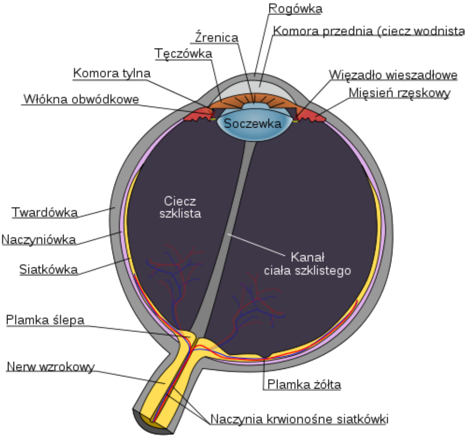
Co modelowanie matematyczne może zrobić dla oka i widzenia?

- Mruganie i łzy.
  - Zespół suchego oka (choroba po części „cywilizacyjna": długotrwałe czytanie, jazda samochodem, soczewki...).
  - Mruganie zaciąga cienką warstwę filmu łzowego. Jak opisać ten przepływ?
  - Jak wyliczyć moment początku schnięcia łez (*Break-Up-Time*, BUT) ?
- Przepływy cieczy wodnistej w komorach.
  - Ciecz wodnista - galaretowana substancja znajdująca się w komorach oka.
  - Jest źródłem powstania ciśnienia wewnątrzgałkowego (IOP).
  - Jej odpowiedni przepływ warunkuje prawidłowe funkcjonowanie oka.
- Tonometria i inne sposoby wyznaczania IOP.
  - IOP jest badane przy prawie każdej wizycie u okulisty.
  - Utrzymanie IOP w odpowiednich granicach jest ważne: za duże $\rightarrow$ jaskra, za małe $\rightarrow$ hipotonia oka.
  - Nieinwazyjne sposoby pomiaru IOP: być może na podstawie kształtu rogówki?

Co modelowanie matematyczne może zrobić dla oka i widzenia?

- Mruganie i łzy.
  - Zespół suchego oka (choroba po części „cywilizacyjna": długotrwałe czytanie, jazda samochodem, soczewki...).
  - Mruganie zaciąga cienką warstwę filmu łzowego. Jak opisać ten przepływ?
  - Jak wyliczyć moment początku schnięcia łez (*Break-Up-Time*, BUT) ?
- Przepływy cieczy wodnistej w komorach.
  - Ciecz wodnista - galaretowana substancja znajdująca się w komorach oka.
  - Jest źródłem powstania ciśnienia wewnątrzgałkowego (IOP).
  - Jej odpowiedni przepływ warunkuje prawidłowe funkcjonowanie oka.
- Tonometria i inne sposoby wyznaczania IOP.
  - IOP jest badane przy prawie każdej wizycie u okulisty.
  - Utrzymanie IOP w odpowiednich granicach jest ważne: za duże $\rightarrow$ jaskra, za małe $\rightarrow$ hipotonia oka.
  - Nieinwazyjne sposoby pomiaru IOP: być może na podstawie kształtu rogówki?
- Jaki kształt ma rogówka?

Anatomia oka i rogówki



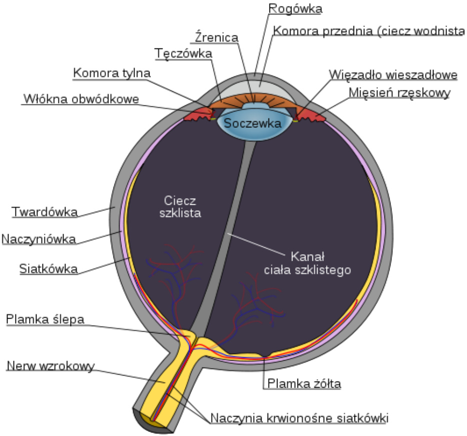
Typowe wymiary:

- wymiar oka 24mm,
- średnica rogówki 11.5mm,
- grubość rogówki 0.5 – 0.7mm,
- wysokość ok. 2mm.

Pięć warstw rogówki:

- nabłonek przedni,
- błona Bowmana,
- istota właściwa,
- błona Descementa,
- nabłonek tylni.

Anatomia oka i rogówki



Typowe wymiary:

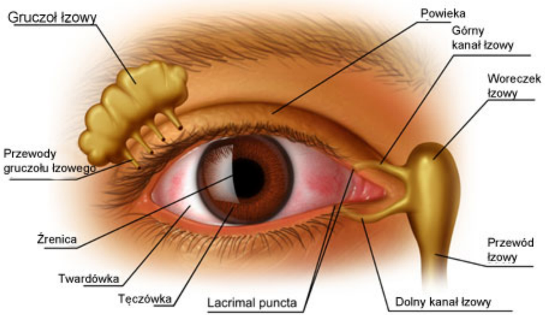
- wymiar oka 24mm,
- średnica rogówki 11.5mm,
- grubość rogówki 0.5 – 0.7mm,
- wysokość ok. 2mm.

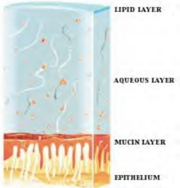
Pięć warstw rogówki:

- nabłonek przedni,
- błona Bowmana,
- istota właściwa,
- błona Descementa,
- nabłonek tylni.

Rogówka jest bardzo ważna - odpowiada za około $\frac{2}{3}$ mocy widzenia!

Co to są łzy i jaka jest ich rola





- Nawilżają oko oraz chronią przed bakteriami.
- Skład: woda, sól (NaCl) oraz enzymy.
- Trzy warstwy łzy: lipidowa $0.1 - 0.2\mu m$, wodna $4 - 10\mu m$ i śluzowa $0.5 - 1\mu m$.

Mruganie i fizyka

- Mruganie rozprowadza film łzowy po powierzchni rogówki.
- Czas między mrugnięciami u zdrowego człowieka to ok. $5 - 8$s (u królika aż 10min!).
- Problemy: zbyt mała produkcja łez, zbyt szybkie parowane $\rightarrow$ „suche oko''.

[1] R.J.Braun et al., *Thin film dynamics on a prolate spheroid with application to the cornea*

Mruganie i fizyka

- Mruganie rozprowadza film łzowy po powierzchni rogówki.
- Czas między mrugnięciami u zdrowego człowieka to ok. $5-8$s (u królika aż 10min!).
- Problemy: zbyt mała produkcja łez, zbyt szybkie parowane $\rightarrow$ „suche oko”.
- Trochę własności fizycznych.
  - Warstwa lipidowa łzy zapobiega nadmiernemu parowaniu. Średnie parowanie to 15×10^{-6} kg m^2 s^{-1} dla normalnych oczu i 60×10^{-6} kg m^2 s^{-1} dla oczu suchych.
  - Warstwa ta również obniża napięcie powierzchniowe: łza-powietrze - 43.3mN m^{-1}, woda-powietrze - 72.3mN m^{-1}.
  - Film łzowy jest lekko pseudoplastyczny (*shear thinning*) - lepkość maleje wraz ze wzrostem naprężeń ścinania.
  - W modelowaniu głównie zakłada się, że łza jest płynem newtonowskim i bierze się pod uwagę szereg czynników: napięcie powierzchniowe, gradienty w warstwie lipidowej, parowanie, mruganie, źródło ciepła oraz geometrię rogówki [1]

[1] R.J.Braun et al., *Thin film dynamics on a prolate spheroid with application to the cornea*

Interludium: Przybliżenie cienkich powłok

- Tak zwana „*Lubrication Theory*”: problem Reynoldsa o oliwieniu łożysk.
- Stosowana, kiedy geometria zagadnienia jest „długa i wąska”: $\epsilon =$ typowa grubość / typowa długość.

Interludium: Przybliżenie cienkich powłok

- Tak zwana „*Lubrication Theory*”: problem Reynoldsa o oliwieniu łożysk.
- Stosowana, kiedy geometria zagadnienia jest „długa i wąska”: $\epsilon =$ typowa grubość / typowa długość.
- **Przykład**: łożysko ślizgowe. Łożysko ($y = H_0 h(x/L)$) jest nieruchome a podłoże $y = 0$ się ślizga z prędkością U.

Interludium: Przybliżenie cienkich powłok

- Tak zwana „*Lubrication Theory*”: problem Reynoldsa o oliwieniu łożysk.
- Stosowana, kiedy geometria zagadnienia jest „długa i wąska”: $\epsilon =$ typowa grubość / typowa długość.
- **Przykład**: łożysko ślizgowe. Łożysko ($y = H_0 h(x/L)$) jest nieruchome a podłoże $y = 0$ się ślizga z prędkością U.
- Wprowadzamy skalowania:

$$\epsilon = \frac{H_0}{L}, \; u^* = \frac{u}{U}, \; v^* = \frac{v}{\epsilon U}, \; t^* = \frac{t}{L/U}, \; p^* = \frac{p}{\mu UL/H_0^2}, \; Re' = \epsilon^2 \frac{UL}{\nu}.$$

x-owa składowa bezwymiarowego równania Naviera-Stokesa ma wtedy postać (opuszczając gwiazdki):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re'}\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Interludium: Przybliżenie cienkich powłok

- Tak zwana „*Lubrication Theory*”: problem Reynoldsa o oliwieniu łożysk.
- Stosowana, kiedy geometria zagadnienia jest „długa i wąska”: $\epsilon =$ typowa grubość / typowa długość.
- **Przykład**: łożysko ślizgowe. Łożysko ($y = H_0 h(x/L)$) jest nieruchome a podłoże $y = 0$ się ślizga z prędkością U.
- Wprowadzamy skalowania:

$$\epsilon = \frac{H_0}{L},\ u^* = \frac{u}{U},\ v^* = \frac{v}{\epsilon U},\ t^* = \frac{t}{L/U},\ p^* = \frac{p}{\mu UL/H_0^2},\ Re' = \epsilon^2 \frac{UL}{\nu}.$$

  x-owa składowa bezwymiarowego równania Naviera-Stokesa ma wtedy postać (opuszczając gwiazdki):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re'}\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

- Korzystając z równania ciągłości dostajemy **Równanie Reynoldsa**:

$$\frac{d}{dx}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x}\right) = 6\frac{\partial h}{\partial x}.$$

Break-up time (BUT)

- Jest zdefiniowany zwykle jako czas wystąpienia pierwszego suchego obszaru zaraz po mrugnięciu.
- Ważny parametr mierzony często przez okulistów. Bardzo zależny od warunków, ale zwykle wynosi $20 - 30$s.

[2] R.J.Braun, A.D.Fitt, *Modelling drainage of the precorneal tear film after a blink*

Break-up time (BUT)

- Jest zdefiniowany zwykle jako czas wystąpienia pierwszego suchego obszaru zaraz po mrugnięciu.
- Ważny parametr mierzony często przez okulistów. Bardzo zależny od warunków, ale zwykle wynosi $20-30$s.
- Bardzo dobre oszacowania na BUT otrzymali Braun i Fitt w [2] .
- Model: przybliżenie cienkich warstw ($\epsilon = d/l =$ wymiar x-owy / wymiar y-kowy) dla równania Naviera-Stokesa + parowanie i grawitacja.

[2] R.J.Braun, A.D.Fitt, *Modelling drainage of the precorneal tear film after a blink*

Break-up time (BUT)

- Jest zdefiniowany zwykle jako czas wystąpienia pierwszego suchego obszaru zaraz po mrugnięciu.
- Ważny parametr mierzony często przez okulistów. Bardzo zależny od warunków, ale zwykle wynosi $20 - 30$s.
- Bardzo dobre oszacowania na BUT otrzymali Braun i Fitt w [2] .
- Model: przybliżenie cienkich warstw ($\epsilon = d/l =$ wymiar x-owy / wymiar y-kowy) dla równania Naviera-Stokesa + parowanie i grawitacja.
- Typowe skale:

$$d = 10\mu\text{m},\ l = 0.36\text{mm},\ \epsilon = 0.028,\ G = 0.75,\ U = 0.75\text{mms}^{-1},\ \text{Re} = 0.2.$$

- Główne równanie modelu dla swobodnego brzegu:

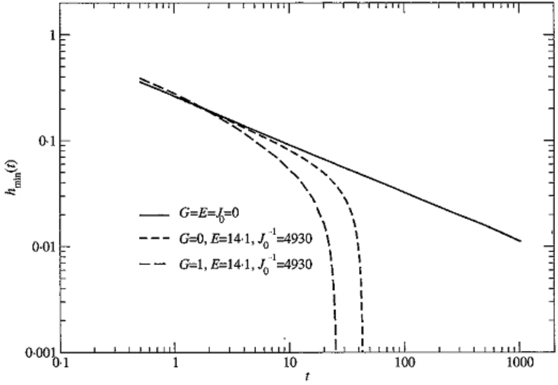
$$h_t + \frac{E}{J_0^{-1} + h} + \left[\frac{h^3}{12}\left(h_{xxx} + G\right)\right]_x = 0,$$

gdzie E, J_0 - stałe związane z temperaturą i parowaniem.

[2] R.J.Braun, A.D.Fitt, *Modelling drainage of the precorneal tear film after a blink*

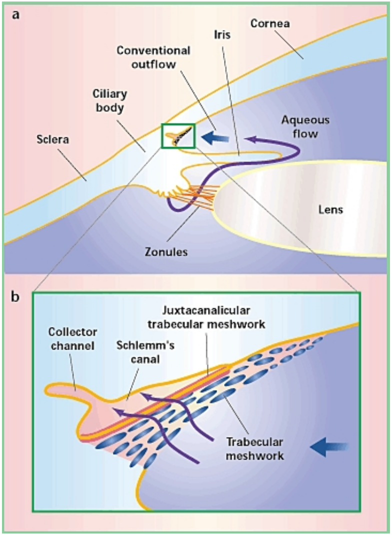
Break-up time (BUT) c.d.

- Braun i Fitt rozwiązali równanie numerycznie na siatce złożonej z 4000 punktów. Za BUT przyjęli czas, w którym *h* było mniejsze niż wielkość siatki.



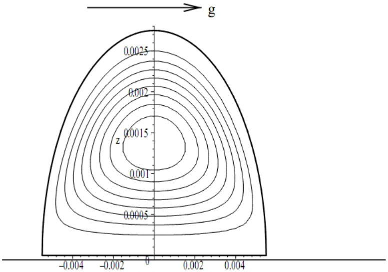
Przepływy w komorach oka

- Komora przednia oka - obszar pomiędzy tęczówką a rogówką. Komora tylna - obszar pomiędzy tęczówką a soczewką.
- Ciecz wodnista (*aqueous humour*) - płyn wypełniający komory (ok. 0.3 cm^3). Usuwa produkty przemiany materii, odżywia oraz zapewnia IOP.
- Jest przeźroczysta i galaretowata. Składa się z wody oraz aminokwasów.
- Produkuje ją wyrostek rzęskowy, skąd płynie przez tylną komorę oraz źrenicę i jest usuwana w komorze Schlemma.
- Musi być zachowana (!) - tyle usuwanej, co produkowanej.
- Jak ten przepływ opisać **matematycznie?**



Przepływy w komorach oka c.d.

- Czym przepływ cieczy wodnistej może być spowodowany? [3,4] .
  - Siła wyporu powstała jako wynik gradientu temperatury pomiędzy tęczówką a komorą przednią.
  - Strumień wyprodukowany przez wyrostek rzęskowy.
  - Oddziaływanie wyporność-grawitacja w pozycji poziomej (np. podczas spania).
  - Faza REM snu.

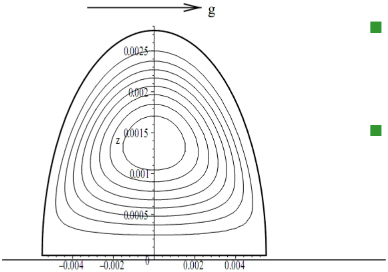


[3] A.D.Fitt, G.Gonzalez, *Fluid Mechanics of the Human Eye: Aqueous Humour Flow in the Anterior Chamber*

[4] C.R.Canning, *Fluid flow in the anterior chamber of a human eye*

Przepływy w komorach oka c.d.

- Czym przepływ cieczy wodnistej może być spowodowany? [3,4] .
  - Siła wyporu powstała jako wynik gradientu temperatury pomiędzy tęczówką a komorą przednią.
  - Strumień wyprodukowany przez wyrostek rzęskowy.
  - Oddziaływanie wyporność-grawitacja w pozycji poziomej (np. podczas spania).
  - Faza REM snu.



- Najprostszy model: równania N-S, równanie ciepła + aproksymacja Bussinesqua oraz „teoria lubrykacji”.
- Można otrzymać dokładne rozwiązanie, np.

$$\psi = -\frac{(T_1 - T_0) g \alpha z^2 (z-h)^2}{24 \nu h}$$

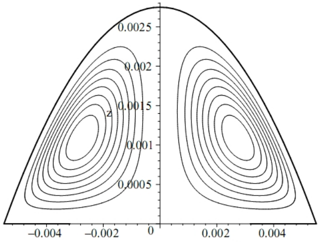
[3] A.D.Fitt, G.Gonzalez, *Fluid Mechanics of the Human Eye: Aqueous Humour Flow in the Anterior Chamber*

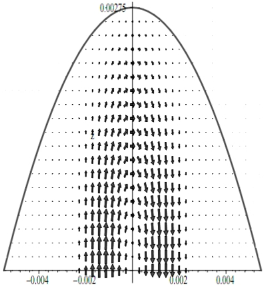
[4] C.R.Canning, *Fluid flow in the anterior chamber of a human eye*

Przepływy w komorach oka c.d.

- Kiedy pacjent śpi, ukrwienie oka nie koniecznie musi spowodować wyrównanie się temperatury.
- Następuje bardzo słaby przepływ spowodowany grawitacją i małym gradientem temperatury.

- Fakodeneza - wibracje soczewki spowodowane ruchami głowy.
- Wibracje te muszą być odpowiednio małe, ale zapewnić dobre widzenie.
- Fitt i Gonzalez założyli okresową prędkość „wpompowywania" cieczy przez źrenicę.
- Przepływ jest istotnie 3-wymiarowy.





Przepływy w komorach oka c.d. (Kanał Schlemma)

[5] Z.Ismail, A.D.Fitt, *Mathematical modelling of flow in Schlemm's Canal and its influence on primary open angle glaucoma*

Przepływy w komorach oka c.d. (Kanał Schlemma)

- Kiedy w przedniej komorze oka występuje za dużo ciecz wodnistej (np. „zatkany" kanał Schlemma), ciśnienie wzrasta.
- POAG (*Primary Open Angle Glaucoma*) - jaskra z otwartym kątem przesączania → postępujące i trwałe uszkodzenie nerwu wzrokowego → ślepota.

---

[5] Z.Ismail, A.D.Fitt, *Mathematical modelling of flow in Schlemm's Canal and its influence on primary open angle glaucoma*

Przepływy w komorach oka c.d. (Kanał Schlemma)

- Kiedy w przedniej komorze oka występuje za dużo ciecz wodnistej (np. „zatkany" kanał Schlemma), ciśnienie wzrasta.
- POAG (*Primary Open Angle Glaucoma*) - jaskra z otwartym kątem przesączania $\rightarrow$ postępujące i trwałe uszkodzenie nerwu wzrokowego $\rightarrow$ ślepota.
- W pracy [5] autorzy korzystają z Prawa Friedenwalda (związek między IOP a objętością oka) oraz teorii cienkich warstw:

$$(FL) \quad p_1 = p_2 \exp\left(K \ln 10(V_1 - V_2)\right).$$

[5] Z.Ismail, A.D.Fitt, *Mathematical modelling of flow in Schlemm's Canal and its influence on primary open angle glaucoma*

Przepływy w komorach oka c.d. (Kanał Schlemma)

- Kiedy w przedniej komorze oka występuje za dużo ciecz wodnistej (np. „zatkany" kanał Schlemma), ciśnienie wzrasta.
- POAG (*Primary Open Angle Glaucoma*) - jaskra z otwartym kątem przesączania $\rightarrow$ postępujące i trwałe uszkodzenie nerwu wzrokowego $\rightarrow$ ślepota.
- W pracy [5] autorzy korzystają z Prawa Friedenwalda (związek między IOP a objętością oka) oraz teorii cienkich warstw:

$$(FL) \quad p_1 = p_2 \exp\left(K \ln 10(V_1 - V_2)\right).$$

- Otrzymali równanie opisujące wzrost ciśnienia wewnątrzgałkowego spowodowane zatkaniem kanału Schlemma:

$$\frac{dp}{dt} \approx Kp \frac{dV_{in}}{dt}.$$

- Zatkanie kanału może doprowadzić do dowolnie dużego przyrostu ciśnienia $\rightarrow$ jaskra i ślepota.

[5] Z.Ismail, A.D.Fitt, *Mathematical modelling of flow in Schlemm's Canal and its influence on primary open angle glaucoma*

IOP

[6] Markiewitz HH, *The so-called Imbert-Fick Law*

IOP

- Utrzymuje odpowiedni kształt oka.
- Typowe IOP: $10 - 20$mmHg. Jeśli $IOP > 25$mmHg może wystąpić jaskra (albo gorzej...). Jeśli $IOP < 10$mmHg następuje rozstrojenie współpracy soczewki z rogówką (albo gorzej...).

[6] Markiewitz HH, *The so-called Imbert-Fick Law*

IOP

- Utrzymuje odpowiedni kształt oka.
- Typowe IOP: $10 - 20$mmHg. Jeśli $IOP > 25$mmHg może wystąpić jaskra (albo gorzej...). Jeśli $IOP < 10$mmHg następuje rozstrojenie współpracy soczewki z rogówką (albo gorzej...).
- Koniecznym jest dokładne zbadanie aktualnego IOP, które jest wrażliwe na panujące warunki. Pomiarami zajmuje się **Tonometria**.
- Istnieje kilka technik pomiarowych:
  - od bardzo inwazyjnych (operacyjnie),
  - przez inwazyjne np. Tonometr Goldmana,
  - do mniej inwazyjnych np. dmuchnięcie powietrzem.

---

[6] Markiewitz HH, *The so-called Imbert-Fick Law*

IOP

- Utrzymuje odpowiedni kształt oka.
- Typowe IOP: $10 - 20$mmHg. Jeśli $IOP > 25$mmHg może wystąpić jaskra (albo gorzej...). Jeśli $IOP < 10$mmHg następuje rozstrojenie współpracy soczewki z rogówką (albo gorzej...).
- Koniecznym jest dokładne zbadanie aktualnego IOP, które jest wrażliwe na panujące warunki. Pomiarami zajmuje się **Tonometria**.
- Istnieje kilka technik pomiarowych:
  - od bardzo inwazyjnych (operacyjnie),
  - przez inwazyjne np. Tonometr Goldmana,
  - do mniej inwazyjnych np. dmuchnięcie powietrzem.
- „Prawo" Imberta-Ficka (tak naprawdę III zasada dynamiki Newtona zastosowana „na siłę"): IOP = wielkość siły (w gramach) potrzebna do spłaszczenia koła o promieniu 3.06mm na rogówce [6].
- Wady: błędne postawy fizyczne, nie najlepsza dokładność zwłaszcza dla wysokiego IOP, nieprzyjemne dla pacjenta, ...

[6] Markiewitz HH, *The so-called Imbert-Fick Law*

IOP

- Utrzymuje odpowiedni kształt oka.
- Typowe IOP: $10 - 20$mmHg. Jeśli $IOP > 25$mmHg może wystąpić jaskra (albo gorzej...). Jeśli $IOP < 10$mmHg następuje rozstrojenie współpracy soczewki z rogówką (albo gorzej...).
- Koniecznym jest dokładne zbadanie aktualnego IOP, które jest wrażliwe na panujące warunki. Pomiarami zajmuje się **Tonometria**.
- Istnieje kilka technik pomiarowych:
  - od bardzo inwazyjnych (operacyjnie),
  - przez inwazyjne np. Tonometr Goldmana,
  - do mniej inwazyjnych np. dmuchnięcie powietrzem.
- „Prawo" Imberta-Ficka (tak naprawdę III zasada dynamiki Newtona zastosowana „na siłę"): IOP = wielkość siły (w gramach) potrzebna do spłaszczenia koła o promieniu 3.06mm na rogówce [6].
- Wady: błędne postawy fizyczne, nie najlepsza dokładność zwłaszcza dla wysokiego IOP, nieprzyjemne dla pacjenta, ...
- Pomiar tylko na podstawie **kształtu** rogówki?

[6] Markiewitz HH, *The so-called Imbert-Fick Law*

Jaki kształt ma rogówka?

Współczesne modele kształtu rogówki oka:

- Najprostsze: oparte na krzywych stożkowych: głównie parabolach lub elipsach (Helmholtz, 1924) (statystycznie poprawne).
- Bardzo skomplikowane: oparte na teorii powłok oraz na FEM.
- Modele oparte na wielomianach Zernike'go (1934) - opisują aberrację. Ostatnio używane są również funkcje Bessela [7].
- Rzeczywiste modele oczu.

Literatura przeglądowa

1. Fowler CW, Dave TN., *Review of past and present techniques of measuring corneal topography*, Ophthalmic Physiol Opt. 14(1) (1994), 49–58,
2. Lindsay R, Smith G, Atchison D., *Descriptors of corneal shape*, Optom Vis Sci. 75(2) (1998), 156–8.
3. Y. Mejía-Barbosa, D. Malacara-Hernández, *A review of methods for measuring corneal topography*, Optometry and Vision Science 78 (2001), 240–253,

[7] J.P. Trevino et al., *Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics*

Nowy model

Główne założenia modelu [8]

- Rogówka jest cienką membraną (stałe napięcie powierzchniowe i brak momentów skręcających).
- Trzy siły wpływają na kształt rogówki: napięcie powierzchniowe, sprężystość i siła pochodząca od ciśnienia wewnątrzgałkowego.
- W modelu opisujemy położenie rogówki h nad płaszczyzną odniesienia Ω (u nas koło).

Równanie kształtu rogówki (w postaci bezwymiarowej)

$$-\nabla^2 h + ah = \frac{b}{\sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}} \quad \text{na } \Omega, \quad h = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

gdzie h-unormowane, $a := \frac{kR^2}{T}$ i $b := \frac{PR}{T}$ oraz k-współczynnik sprężystości, T-naprężenie, P-ciśnienie wewnątrzgałkowe, R-typowy rozmiar rogówki.

[8] W.Okrasiński, Ł.Płociniczak, *A Nonlinear Mathematical Model of the Corneal Shape*

Zagadnienie „wprost”

Jak ze znajomości a oraz b znaleźć kształt rogówki h?

- Zakładamy symetrię osiową $h = h(r)$ wtedy a oraz b muszą być stałe.
- Rozwiązujemy zagadnienie

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dh}{dr}\right) + ah = \frac{b}{\sqrt{1+h'^2}}, \quad 0 \le r \le 1,\ h'(0) = 0,\ h(1) = 0. \quad (1)$$

Zagadnienie „wprost”

Jak ze znajomości a oraz b znaleźć kształt rogówki h?

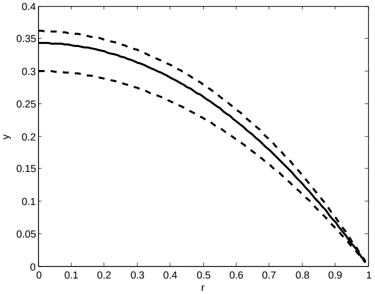
- Zakładamy symetrię osiową $h = h(r)$ wtedy a oraz b muszą być stałe.
- Rozwiązujemy zagadnienie

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dh}{dr}\right) + ah = \frac{b}{\sqrt{1+h'^2}}, \quad 0 \le r \le 1,\ h'(0) = 0,\ h(1) = 0. \quad (1)$$

- Dla odpowiednio małego b mamy istnienie, jednoznaczność, monotoniczność oraz podstawowe oszacowania rozwiązania (1) przez

$$h_0(r) := \frac{b}{a}\left(1 - \frac{I_0(\sqrt{a}r)}{I_0(\sqrt{a})}\right),$$

gdzie I_0 jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju.



Zagadnienie „wprost”

Jak ze znajomości a oraz b znaleźć kształt rogówki h?

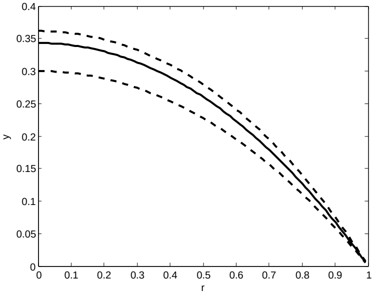
- Zakładamy symetrię osiową $h = h(r)$ wtedy a oraz b muszą być stałe.
- Rozwiązujemy zagadnienie

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dh}{dr}\right) + ah = \frac{b}{\sqrt{1+h'^2}}, \quad 0 \le r \le 1, \ h'(0) = 0, \ h(1) = 0. \ (1)$$

- Dla odpowiednio małego b mamy istnienie, jednoznaczność, monotoniczność oraz podstawowe oszacowania rozwiązania (1) przez

$$h_0(r) := \frac{b}{a}\left(1 - \frac{I_0(\sqrt{a}r)}{I_0(\sqrt{a})}\right),$$

gdzie I_0 jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju.



- Dla małych parametrów a rozwiązanie (1) jest parabolą.

Zagadnienie „wprost” c.d.

Twierdzenie 1

Niech $b \le \frac{\sqrt{a}}{I_1(\sqrt{a})}\frac{\sqrt{2I_0(\sqrt{a})-1}}{I_0(\sqrt{a})-1}$. Rozwiązanie zagadnienia (1) jest dodatnią, nierosnącą funkcją h, dla której zachodzą

$$Ah_1 \le h \le h_0,$$

gdzie h_0 jest zdefiniowana wzorem

$$h_0(r) := \frac{b}{a}\left(1 - \frac{I_0(\sqrt{a}r)}{I_0(\sqrt{a})}\right),$$

oraz h_1 jest kolejnym elementem w ciągu kolejnych przybliżeń. Ponadto,

$$A = \sqrt{\frac{1 + h_0'(1)^2}{1 + \left(2 - \frac{1}{I_0(\sqrt{a})}\right) h_0'(1)^2}}.$$

Zagadnienia odwrotne

Jak znaleźć wartości a **i** b **znając** h**?**

- Problemy tego typu są zwykle **źle postawione**, czyli takie, które nie spełniają któregoś z poniższych warunków
  - mają rozwiązanie,
  - mają dokładnie jedno rozwiązanie,
  - mały błąd w danych wejściowych powoduje mały błąd w danych wyjściowych (stabilność).

Zagadnienia odwrotne

Jak znaleźć wartości *a* i *b* znając *h*?

- Problemy tego typu są zwykle **źle postawione**, czyli takie, które <u>nie</u> spełniają któregoś z poniższych warunków
  - mają rozwiązanie,
  - mają dokładnie jedno rozwiązanie,
  - mały błąd w danych wejściowych powoduje mały błąd w danych wyjściowych (stabilność).
- W naszym przypadku rozważamy dwa zagadnienia:
  1. a i b są stałe i nieznane $\rightarrow$ problem nieliniowy,
  2. a jest stałe i znane a b (niekoniecznie stałe) musimy znaleźć $\rightarrow$ problem liniowy .

Zagadnienia odwrotne

Jak znaleźć wartości a i b znając h?

- Problemy tego typu są zwykle **źle postawione**, czyli takie, które nie spełniają któregoś z poniższych warunków
  - mają rozwiązanie,
  - mają dokładnie jedno rozwiązanie,
  - mały błąd w danych wejściowych powoduje mały błąd w danych wyjściowych (stabilność).
- W naszym przypadku rozważamy dwa zagadnienia:
  1. a i b są stałe i nieznane $\rightarrow$ problem nieliniowy,
  2. a jest stałe i znane a b (niekoniecznie stałe) musimy znaleźć $\rightarrow$ problem liniowy .
- **Uwaga:** Nie możemy liczyć na jednoznaczne rozwiązanie - szukamy rozwiązania w sensie normy L^2 (najmniejszych kwadratów).

Nieliniowy problem odwrotny (a, b stałe i nieznane)

W kolejnych rozważaniach zakładać będziemy, że krzywizna rogówki jest mała. Upraszcza to nasze równanie

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right) + ah = b, \quad h'(0) = 1, \quad h(1) = 0.$$

[10] W.Okrasiński, Ł.Płociniczak, *Nonliear Parameter Identification in Corneal Geometry Model*

Nieliniowy problem odwrotny (a, b stałe i nieznane)

W kolejnych rozważaniach zakładać będziemy, że krzywizna rogówki jest mała. Upraszcza to nasze równanie

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right) + ah = b, \quad h'(0) = 1, \quad h(1) = 0.$$

- Problem nieliniowy rozwiązujemy w dwóch krokach [10] :
  1. Najpierw znajdujemy

$$b^\dagger = b^\dagger(a) = \frac{\langle f(a,\cdot), h\rangle}{\|f(a,\cdot)\|^2},$$

gdzie $f(a,r) := \frac{b}{a}\left(1 - \frac{I_0(\sqrt{a}r)}{I_0(\sqrt{a})}\right)$.

[10] W.Okrasiński, Ł.Płociniczak, *Nonliear Parameter Identification in Corneal Geometry Model*

Nieliniowy problem odwrotny (a, b stałe i nieznane)

W kolejnych rozważaniach zakładać będziemy, że krzywizna rogówki jest mała. Upraszcza to nasze równanie

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right)+ah=b, \quad h'(0)=1, \quad h(1)=0.$$

- Problem nieliniowy rozwiązujemy w dwóch krokach [10] :
  1. Najpierw znajdujemy

     $$b^{\dagger}=b^{\dagger}(a)=\frac{\langle f(a,\cdot),h\rangle}{\|f(a,\cdot)\|^2},$$

     gdzie $f(a,r):=\frac{b}{a}\left(1-\frac{I_0(\sqrt{a}r)}{I_0(\sqrt{a})}\right)$.
  2. Potem rozwiązujemy nieliniowy problem polegający na znalezieniu a. Stosujemy metodę iteracyjną podobną do metody stycznych Newtona (nowy dowód zbieżności)

     $$a_{n+1}=a_n+\Delta a_n, \quad \Delta a_n=\frac{\left\langle h-f(a_n,\cdot),\frac{\partial}{\partial a}b^{\dagger}(a)f(a;\cdot)\right\rangle}{\left\|\frac{\partial}{\partial a}b^{\dagger}(a)f(a;\cdot)\right\|^2}.$$

[10] W.Okrasiński, Ł.Płociniczak, *Nonliear Parameter Identification in Corneal Geometry Model*

Liniowy problem odwrotny (a stałe i znane, b nieznane)

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}+ah=b, \quad h|_{\partial\Omega}=0,$$

gdzie $\partial\Omega$ jest okręgiem jednostkowym.

[9] Ł.Płociniczak, W.Okrasiński, *Regularization of an Ill-posed Model in Corneal Topography*

Liniowy problem odwrotny (a stałe i znane, b nieznane)

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}+ah=b, \quad h|_{\partial\Omega}=0,$$

gdzie $\partial\Omega$ jest okręgiem jednostkowym.

- Używamy funkcji własnych [9] $\Phi_{nm}(r,\theta) := \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{I_n(\mu_{nm}r)}{I_{n+1}(\mu_{nm})}e^{in\theta}$, gdzie μ_{nm} jest m-tym zerem funkcji I_n (zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu n).

[9] Ł.Płociniczak, W.Okrasiński, *Regularization of an Ill-posed Model in Corneal Topography*

Liniowy problem odwrotny (a stałe i znane, b nieznane)

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}+ah=b, \quad h|_{\partial\Omega}=0,$$

gdzie $\partial\Omega$ jest okręgiem jednostkowym.

- Używamy funkcji własnych [9] $\Phi_{nm}(r,\theta) := \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{I_n(\mu_{nm}r)}{I_{n+1}(\mu_{nm})}e^{in\theta}$, gdzie μ_{nm} jest m-tym zerem funkcji I_n (zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu n).
- Rozwiązanie problemu odwrotnego $b^\dagger = \sum_{n,m}(a-\mu_{nm}^2)\langle h,\Phi_{nm}\rangle\Phi_{nm}$.

[9] Ł.Płociniczak, W.Okrasiński, *Regularization of an Ill-posed Model in Corneal Topography*

Liniowy problem odwrotny (a stałe i znane, b nieznane)

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}+ah=b, \quad h|_{\partial\Omega}=0,$$

gdzie $\partial\Omega$ jest okręgiem jednostkowym.

- Używamy funkcji własnych [9] $\Phi_{nm}(r,\theta) := \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{I_n(\mu_{nm}r)}{I_{n+1}(\mu_{nm})}e^{in\theta}$, gdzie μ_{nm} jest m-tym zerem funkcji I_n (zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu n).
- Rozwiązanie problemu odwrotnego $b^\dagger = \sum_{n,m}(a-\mu_{nm}^2)\langle h, \Phi_{nm}\rangle \Phi_{nm}$.
- **Uwaga:** $a-\mu_{nm}^2 \to \infty$, co powoduje utratę stabilności: mały błąd w h spowoduje utratę zbieżności szeregu.

---

[9] Ł.Płociniczak, W.Okrasiński, *Regularization of an Ill-posed Model in Corneal Topography*

Liniowy problem odwrotny (a stałe i znane, b nieznane)

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}+ah=b, \quad h|_{\partial\Omega}=0,$$

gdzie $\partial\Omega$ jest okręgiem jednostkowym.

- Używamy funkcji własnych [9] $\Phi_{nm}(r,\theta) := \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{I_n(\mu_{nm}r)}{I_{n+1}(\mu_{nm})}e^{in\theta}$, gdzie μ_{nm} jest m-tym zerem funkcji I_n (zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu n).
- Rozwiązanie problemu odwrotnego $b^\dagger = \sum_{n,m}(a-\mu_{nm}^2)\langle h, \Phi_{nm}\rangle \Phi_{nm}$.
- **Uwaga:** $a-\mu_{nm}^2 \to \infty$, co powoduje utratę stabilności: mały błąd w h spowoduje utratę zbieżności szeregu.
- Konieczna jest regularyzacja

$$b_{\alpha,T(N,M)} := \sum_{\substack{n=-N,\\ m=1}}^{N,M} \frac{\langle h, \Phi_{nm}\rangle}{\alpha+\frac{1}{a-\mu_{nm}^2}}\Phi_{nm}.$$

[9] Ł.Płociniczak, W.Okrasiński, *Regularization of an Ill-posed Model in Corneal Topography*

Przypadek ogólny c.d.

Jak bardzo $b^{\delta}_{\alpha,T}$ różni się od rzeczywistej wartości b? (Jeśli $\left\|h^{\delta} - h\right\| \leq \delta$).

Twierdzenie 2

Mamy

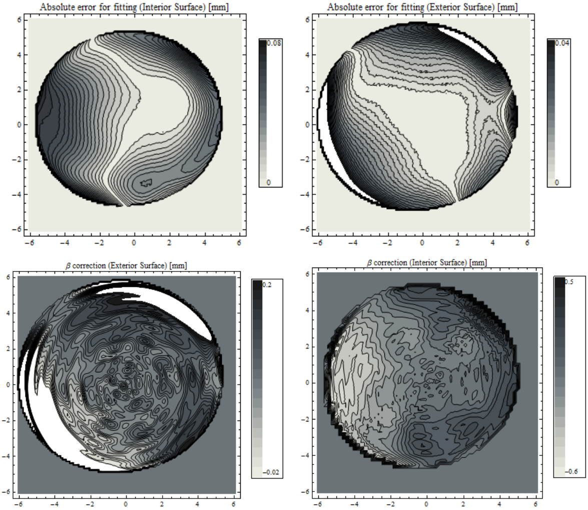
$$\left\|b^{\delta}_{\alpha,T(N,M)} - b\right\| \leq 2\sqrt{D\delta},$$

jeśli tylko $\alpha = \alpha(\delta)$, $N = N(\delta)$, $M = M(\delta)$ są wybrane tak, aby

$$\alpha + C(N,M) = \sqrt{\frac{\delta}{D}},$$

gdzie $\|y\| \leq D$ oraz $C(N,M) := \inf\{\frac{1}{a-\mu^2_{nm}} : |n| \leq N, m \leq M\}$.

Numeryka



Błędy dopasowania, przy a_0 i b_0 stałych.

β, gdzie $b = b_0 + \beta$.

Podsumowanie

- Modelowanie matematyczne w zagadnieniach związanych z okiem jest bardzo potrzebne.
- Jest źródłem bardzo ciekawych i nietrywialnych problemów z wielu dziedzin matematyki.
- Przyszła rewolucja w medycynie oka zależy głównie od matematyki.
- Otrzymaliśmy nowy, łatwy do zastosowania, model topografii rogówki oparty na podstawach fizycznych.
- Przedstawiliśmy nową, szybką metodę iteracyjną wyznaczania nieznanych parametrów w zagadnieniu odwrotnym.
  - Metody znalezienia a i b pozwalają na dopasowanie modelu do danych (z małym błędem).
  - Współczynniki a i b są związane z mierzalnymi parametrami rogówki oka, przez co mogą mieć znaczenie w diagnostyce i leczeniu różnych chorób widzenia.
  - Funkcja β zawiera informację o odstępstwach topografii rogówki od symetrii obrotowej.

Bibliografia

1. R.J.Braun et al., *Thin film dynamics on a prolate spheroid with application to the cornea*, J Eng Math (2012) 73:121–138
2. R.J.Braun, A.D.Fitt, *Modelling drainage of the precorneal tear film after a blink*, Mathematical Medicine and Biology 20 (2003), 1-28
3. A.D.Fitt, G.Gonzalez, *Fluid Mechanics of the Human Eye: Aqueous Humour Flow in the Anterior Chamber*, Bulletin of Mathematical Biology (2006)
4. C.R.Canning et al., *Fluid flow in the anterior chamber of a human eye*, IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology 19 (2002), 31-60
5. Z.Ismail, A.D.Fitt, *Mathematical modelling of flow in Schlemm's Canal and its influence on primary open angle glaucoma*, International Conference on Science and Technology: Applications in Industry and Education (2008)
6. H.H. Markiewitz, *The so-called Imbert-Fick Law*, AMA Arch.Ophthalmol. 1960; 64: 189/159.
7. J.P. Trevino et al., *Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics*, Ophthalmic and Physiological Optics, 2013

Bibliografia c.d.

8. W.Okrasiński, Ł.Płociniczak, *A Nonlinear Mathematical Model of the Corneal Shape*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 13 (2012) pp. 1498-1505
9. Ł.Płociniczak, W.Okrasiński, *Regularization of an Ill-posed Model in Corneal Topography*, Inverse Problems in Science and Engineering (2013), **DOI:** 10.1080/17415977.2012.753443,
10. W.Okrasiński, Ł.Płociniczak, *Nonliear Parameter Identification in a Corneal Geometry Model*, wysłane do Inverse Problems,
11. W.Okrasiński, Ł.Płociniczak, *Bessel Function Model for Corneal Topography*, wysłane do Applied Mathematics and Computation,